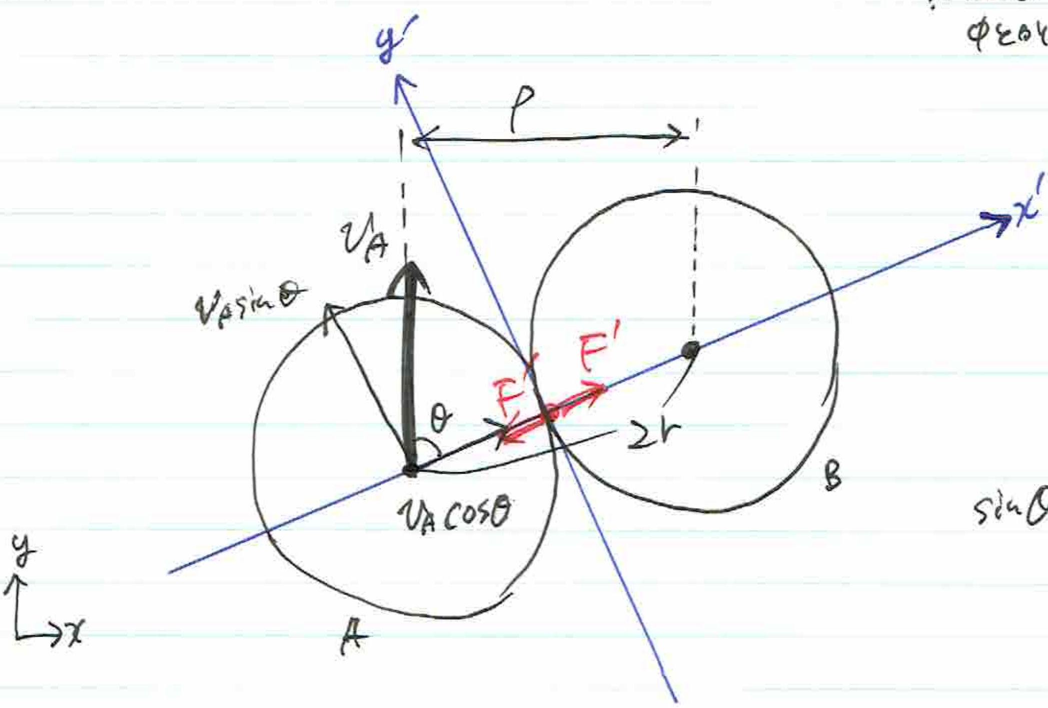
H26 東大 問1

(1)

※ この θ、(2) の θ と混同しちゃうので φ とかにすればよかった……



$\sin\theta = \dfrac{\rho}{2r}$

図のように x', y' 軸と θ を取る。衝突後の速度を v_A', v_B' とする。

撃力 F は x' 軸方向なので y' 方向の速度は不変。よって

$$v_{Ay'}' = v_A \sin\theta \quad , \quad v_{By'}' = 0$$

運動量保存則より

$$m v_A \cos\theta = m v_{Ax'}' + m v_{Bx'}'$$

$$\therefore v_A \cos\theta = v_{Ax'}' + v_{Bx'}' \quad \cdots ①$$

反発係数より

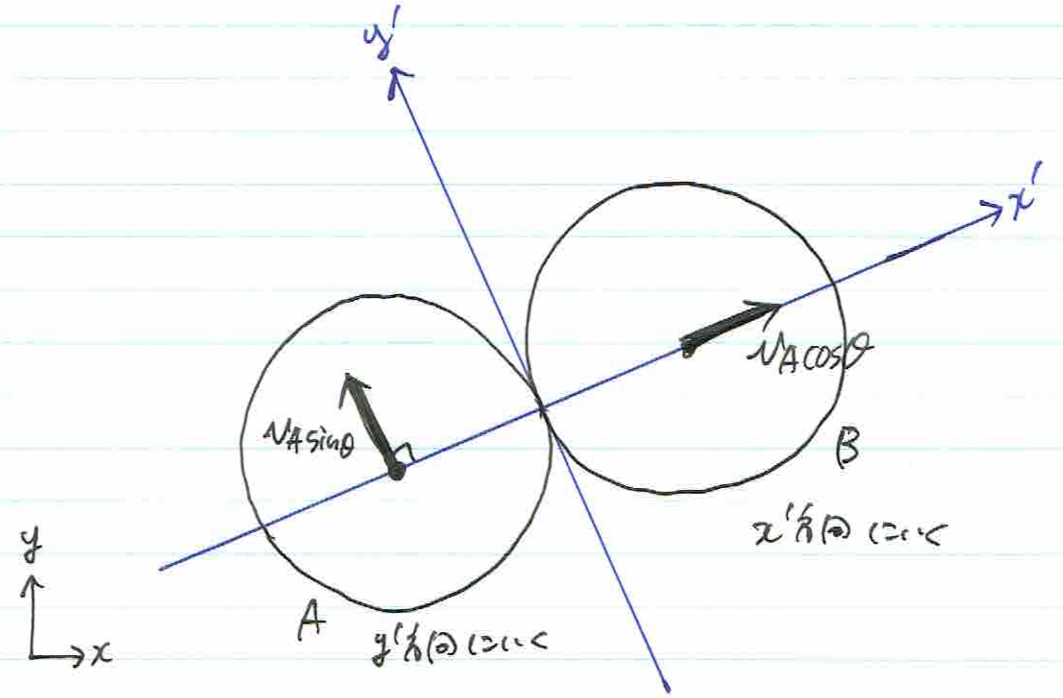
$$e = -\frac{v_{Ax'}' - v_{Bx'}'}{v_{Ax'} - v_{Bx'}}$$

$$\therefore 1 = -\frac{v_{Ax'}' - v_{Bx'}'}{v_A \cos\theta}$$

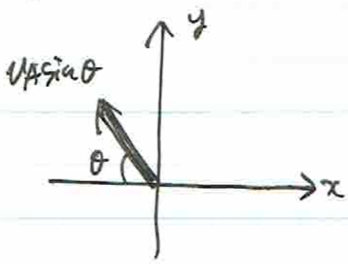
$$\therefore v_A \cos\theta = -v_{Ax'}' + v_{Bx'}' \quad \cdots ②$$

①, ② より、 $v_{Ax'}' = 0$, $v_{Bx'}' = v_A \cos\theta$ 　完全弾性衝突だもんな

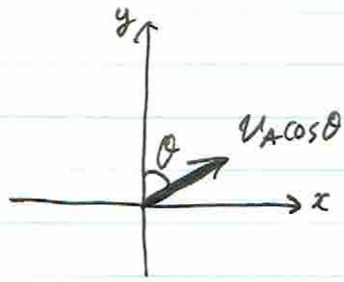
つまり衝突後はこう動く



Aの運動方向



Bの運動方向



互いに直角方向。//

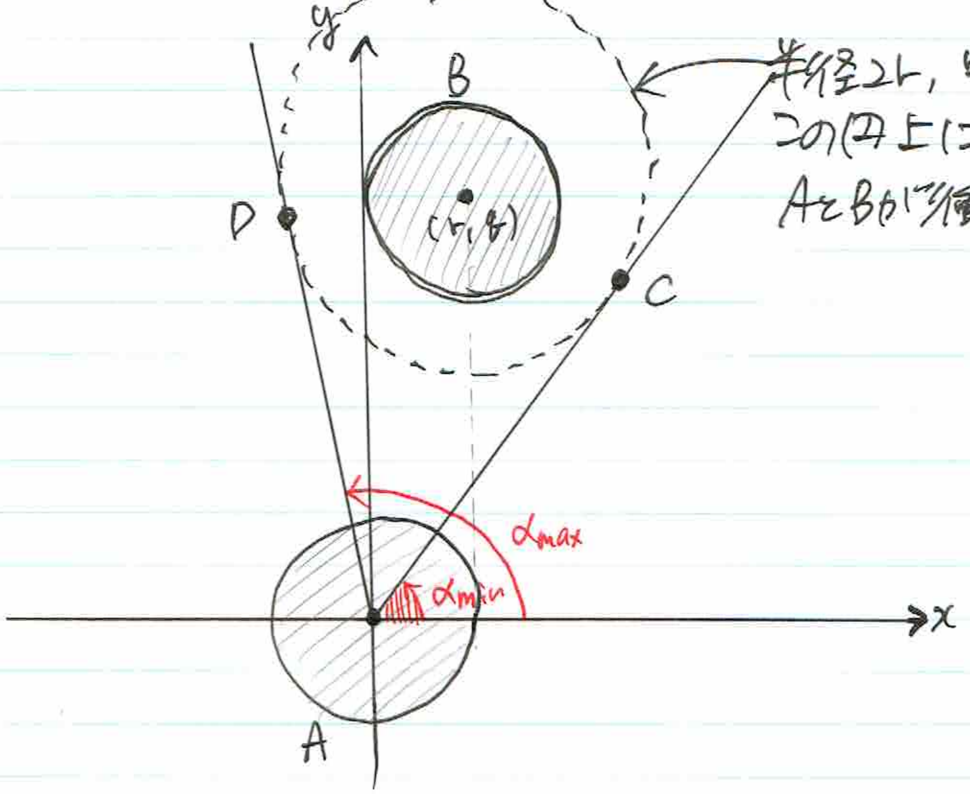
ただし $\sin\theta = \frac{\rho}{2r}$

ここでのθは(2)のθとぜんぜん別のものです…

問題よんでなかった ごめん….

(2)

Aがいた場所をxy軸の原点として座標をかく。$p=r$



半径$2r$, 中心(r, q)の円.
この円上にAの中心がくるとAとBが衝突する。

図のように点C, Dを決める。
C, DはAとBがギリギリぶつかるときのABの接触点である。

AとBがぶつかるときのAの進行方向の角度の最小・最大値 $\alpha_{min}, \alpha_{max}$を求めるため、点C, Dを求めて直線AC, ADの傾きを出す。

$$\begin{cases} \text{点線の円の方程式}: (x-r)^2+(y-q)^2=4r^2 & \cdots ① \\ \text{原点を通る直線の式}: y=ax & \cdots ② \end{cases}$$

②を①に代入

$$(x-r)^2+(ax-q)^2=4r^2$$

$$\therefore (1+a^2)x^2-2(r+qa)x+q^2-3r^2=0 \quad \cdots ③$$

点線の円と直線の接点であるC, Dでは③が重解になっているはず。
よって判別式$=0$より

$$(r+qa)^2-(1+a^2)(q^2-3r^2)=0$$

$$\therefore r^2+2rqa-q^2-3r^2+3r^2a^2=0$$

$$\therefore 3r^2a^2+2rqa-(q^2+2r^2)=0$$

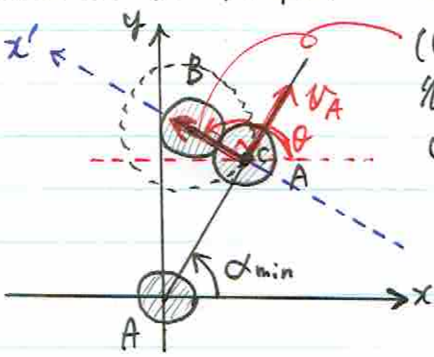
$$\therefore a=\frac{1}{3r^2}\left(-rq\pm\sqrt{r^2q^2+3r^2(q^2+2r^2)}\right)$$

$$=\frac{1}{3r^2}\left(-rq\pm r\sqrt{4q^2+6r^2}\right)$$

$$=\frac{1}{3r}\left(-q\pm\sqrt{4q^2+6r^2}\right)$$

$$\therefore\begin{cases}\text{直線ACの傾き}\cdots\dfrac{1}{3r}\left(-q+\sqrt{4q^2+6r^2}\right)=\tan\alpha_{min}\\ \text{直線ADの傾き}\cdots\dfrac{1}{3r}\left(-q-\sqrt{4q^2+6r^2}\right)=\tan\alpha_{max}\end{cases}$$

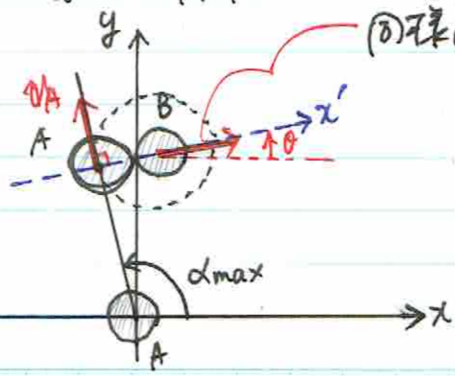
● 点C(右側すれすれ)で衝突する場合



(1)と同様に考えて，中心をつなぐx'軸方向の速度を衝突によって交換するので，
α_{min}からすこしでも角度αが大きくなるとBはこっちにとぶ。

$$\theta=\alpha_{min}+\frac{\pi}{2}$$

● 点D(左側すれすれ)で衝突する場合



同様に，αがα_{max}からすこしでも小さくなればBはこっちにとぶ。

$$\theta=\alpha_{max}-\frac{\pi}{2}$$

したがって θのとりうる範囲は

$$\alpha_{max} - \frac{\pi}{2} < \theta < \alpha_{min} + \frac{\pi}{2}$$

$\theta = \pi/2$を含むので $\tan\theta$の範囲としては

$$\tan\left(\alpha_{max} - \frac{\pi}{2}\right) < \tan\theta, \quad \text{or} \quad \tan\theta < \tan\left(\alpha_{min} + \frac{\pi}{2}\right)$$

前者

$$\tan\theta > \tan\left(\alpha_{max} - \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{\tan\alpha_{max}}$$

$$= \frac{3r}{g + \sqrt{4g^2 + 6r^2}}$$

$$= \frac{3r\left(g - \sqrt{4g^2+6r^2}\right)}{g^2 - (4g^2 + 6r^2)} = \frac{r\left(\sqrt{4g^2+6r^2} - g\right)}{g^2 + 2r^2}$$

後者

$$\tan\theta < \tan\left(\alpha_{min} + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{-\tan\alpha_{min}}$$

$$= \frac{3r}{g\sqrt{4g^2+6r^2}}$$

$$= \frac{3r\left(g + \sqrt{4g^2+6r^2}\right)}{g^2 - (4g^2 + 6r^2)} = -\frac{r\left(g + \sqrt{4g^2+6r^2}\right)}{g^2 + 2r^2}$$

以上より、

$$\tan\theta > \frac{r\left(\sqrt{4g^2+6r^2} - g\right)}{g^2 + 2r^2} \quad \text{および} \quad \tan\theta < -\frac{r\left(\sqrt{4g^2+6r^2} + g\right)}{g^2 + 2r^2}$$

まちがってるとこあってたら
おしえてくれー